第27卷 第4期 2010年08月
工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS
Vol. 27 No. 4 Aug. 2010

文章编号:1005-3085(2010)04-0652-11

形状梯度法求解不可压缩流的形状优化问题*

朱静涛，高志明，马逸尘

(西安交通大学理学院，西安 710049)

摘　要: 流体中物体形状优化设计在实践中有重要的应用。对于区域内由Navier-Stokes方程描述的流体，本文研究以流体状态的泛涵为目标函数的优化问题。基于共轭方法与函数空间参数化方法，本文得到了问题的形状导数。在此基础上构造了一种共轭梯度算法。数值例子表明本文的方法是可行的和稳定的。

关键词: 形状优化；Navier-Stokes方程；极大极小值问题

分类号: **AMS**(2000) 65K10; 76B55; 49Q20　　**中图分类号**: O241.82; O242.21　　**文献标识码**: A

1 引言

不可压缩流的形状优化问题在很多领域都有着广泛的应用，如航空、发动机推进、水利、海洋学、建筑学、空气动力学等[1-4]。本文的目标是根据Lagrange方程的极大极小值问题的可微性来推导关于目标函数的共轭方程。再使用函数空间参数化方法推导关于目标函数的形状导数。使用形状导数来求解二维混合边界条件的不可压缩流的形状优化问题。

本文的结构内容如下。第二部分给出不可压缩流的形状优化模型和速度法介绍。第三部分推导对于给定的目标函数的共轭方程。第四部分使用函数空间参数化方法推导出关于给定目标函数的形状导数公式。第五和六部分分别给出了形状优化的具体算法和数值算例，验证了算法的有效性和稳定性。

2 预备知识

首先给出不可压缩流的形状优化问题模型。设Θ是$\mathbb{R}^N\,(N=2,3)$上的有界开区域，$\Omega\subset\Theta$是开区域(见图1)，它的边界记为$\partial\Omega$，它是C^2类的。如图1，$\Gamma_{\rm in}$是入流边界，$\Gamma_{\rm out}$是出流边界，$\Gamma_0=\partial\Omega/(\Gamma_{\rm in}\bigcup\Gamma_{\rm out})$。从$\Gamma_{\rm in}$给定一个入流$g$，经过管道$\Omega$最后从$\Gamma_{\rm out}$流出去。在管壁$\Gamma_0$上流速度$u$为0。

$$\begin{cases} -\nu\Delta u+(Du)\cdot u+\nabla p=f, & \text{在 } \Omega \text{ 中},\\ {\rm div} u=0, & \text{在 } \Omega \text{ 中},\\ u=g, & \text{在 } \Gamma_{\rm in} \text{ 上},\\ u=0, & \text{在 } \Gamma_0 \text{ 上},\\ \sigma\cdot n=0, & \text{在 } \Gamma_{\rm out} \text{ 上}, \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期: 2008-05-30.　**作者简介**: 朱静涛(1983年11月生)，女，硕士. 研究方向：计算流体.

***基金项目**: 国家自然科学基金(10671153; 40730424).

其中 $\nu=1/Re$，Re 为 Reynolds 数，$\sigma=-pI+\nu(Du+D^*u)$，$u=(u_1,u_2)$，

$$Du=\begin{pmatrix}\partial_1u_1 & \partial_1u_2\\ \partial_2u_1 & \partial_2u_2\end{pmatrix}, \tag{2}$$

D^*u 为 Du 的转置。

令 $\Gamma_D:=\Gamma_{\text{in}}\bigcup\Gamma_0$，则 u 在 Γ_D 上有 $u=\tilde{g}$，其中

$$\tilde{g}=\begin{cases} g, & \text{在 } \Gamma_{\text{in}} \text{ 上},\\ 0, & \text{在 } \Gamma_0 \text{ 上}.\end{cases} \tag{3}$$

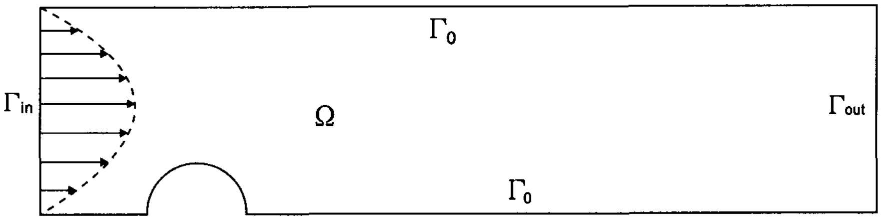


图 1： 有界开区域 Ω

对于给定优化问题的目标函数 $J(\Omega)$，我们求解形状优化问题就是寻找一个区域 $\Omega^*\subset\Theta$ 使得

$$J(\Omega^*)=\min_{\Omega\subset\Theta}J(\Omega):=\min_{\Omega\subset\Theta}F(\Omega,u,p), \tag{4}$$

其中 (u,p) 满足 (1) 式。

本文中考虑以下两种目标函数的形状优化问题，其中 u_d 是事先给定的已知的目标速度，在实际应用中一般由设计者给出

$$J(\Omega)=\frac{1}{2}\int_\Omega|u-u_d|^2\mathrm{d}x, \tag{5}$$

$$J(\Omega)=\frac{1}{2}\int_{\tilde{\Gamma}}|u-u_d|^2\mathrm{d}s, \tag{6}$$

其中 $\tilde{\Gamma}\subset D$ 是需要优化的边界。以下我们主要以第一个目标函数 (5) 来讨论形状优化问题的算法推导，目标函数 (6) 讨论类似。并在第六节中给出了对于这两类目标函数的数值算例。

这里先简要介绍一下速度法的理论[5,6]。设区域的边界 $\partial\Omega$ 是 C^k 的，$k\ge 1$。令 $V(t,x)\in\mathbb{E}^k:=C([0,\tau];\mathscr{D}^k(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N))$，其中 $\mathscr{D}^k(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)$ 是 k 阶连续的具有紧支集的函数空间，$\mathbb{R}^N$ 是 N 维欧氏空间。考虑以下动力系统

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t,X)=V(t,x(t)), & t\ge 0,\\ x(0,X)=X,\end{cases} \tag{7}$$

其中 X 是 Ω 中的点。令 $T_t:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$，$T_t(X)=x(t,X)$，其中 $x(t,X)$ 是 t 时刻 (7) 式的解。定义

$$\Omega_t := T_t(\Omega) = \left\{ x\in\mathbb{R}^N \mid \exists\, X\in\Omega,\ \text{使得}\ x(0)=X,\ x(t)=x \right\}. \tag{8}$$

定义 1[5] 目标函数 $J:\Omega\to\mathbb{R}$

(i) 如果极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{J(\Omega_t)-J(\Omega)}{t} =: \mathrm{d}J(\Omega;V)$$

存在，则称 J 在区域 Ω 上沿着 V 方向上的欧拉半导数为 $\mathrm{d}J(\Omega;V)$。

(ii) 如果 $\mathrm{d}J(\Omega;V)$ 存在，对于任意 $V\in\mathbb{E}^N$ 映射 $V\to\mathrm{d}J(\Omega;V):\mathbb{E}^N\to\mathbb{R}$ 是线性且连续的，则 J 在 Ω 上是形状可微的，且 $\mathrm{d}J(\Omega;V)$ 定义为 J 在 Ω 上的形状导数。

由 Hadamard-Zolésio 结构定理[5] 可知关于函数 J 的 Euler 半导数总可以化为以下形式

$$\mathrm{d}J(\Omega;V) = \left\langle K(\partial\Omega), \gamma_{\partial\Omega}(V)\cdot n\right\rangle, \tag{9}$$

其中 n 是边界 $\partial\Omega$ 上的外法向量，$\gamma_{\partial\Omega}$ 是 V 在 $\partial\Omega$ 上的迹。由 (9) 式子可知 J 的欧拉半导数可以限制在 $\partial\Omega$ 上并且仅仅与 V 在 $\partial\Omega$ 上的限制有关，则 Ω 上的形状梯度为$K(\partial\Omega):=\gamma^*_{\partial\Omega}(Kn)$，其中 $\gamma^*_{\partial\Omega}$ 为 $\gamma_{\partial\Omega}$ 在 $\partial\Omega$ 上的伴随算子。

3 共轭方程

下面讨论目标函数 (5) 式对应优化问题中的共轭方程。首先给出方程 (1) 式的变分形式。设 Ω 具有光滑的边界，且简记 Ω 上的一些空间如下

$$\mathbb{V}_{\tilde g}(\Omega) := \left\{ (v,l) \mid v\in\mathbb{H}^2(\Omega),\, l\in H^1(\Omega)/\mathbb{R},\, v=\tilde g\ \text{在}\ \Gamma_D\ \text{上} \right\},$$

$$\mathbb{V}_0(\Omega) := \left\{ (v,l) \mid v\in\mathbb{H}^2(\Omega),\, l\in H^1(\Omega)/\mathbb{R},\, v=0\ \text{在}\ \Gamma_D\ \text{上} \right\},$$

其中 $\mathbb{H}^d(D)=\left(H^d(D)\right)^N$。假设 f 和 g 是固定的，(u,p) 是 (1) 的解，$f,g\in\mathbb{H}^1(\mathbb{R}^N)$，$(u,p)\in\mathbb{V}_{\tilde g}(\Omega)$。

令

$$a(\varphi,\psi) := \int_\Omega 2\nu\varepsilon(\varphi):\varepsilon(\psi)\mathrm{d}x,$$

其中 $\varepsilon(\varphi)=\frac{1}{2}(D\varphi+D^*\varphi)$，符号 $A:B$ 表示矩阵 A 和 B 对应项相乘以后再相加，即若 $A=(a_{ij})_{m\times m}$，$B=(b_{ij})_{m\times m}$，则 $A:B=\sum_{i,j}a_{ij}b_{ij}$。定义

$$b(\varphi,\eta) := \int_\Omega \eta\mathrm{div}\varphi\mathrm{d}x,\quad c(\varphi;\psi,\phi) := \int_\Omega (D\psi)\varphi\cdot\phi\mathrm{d}x,\quad (\varphi,\psi) := \int_\Omega \varphi\cdot\psi\mathrm{d}x,$$

则 (u,p) 是 (1) 式的解当且仅当满足下式，也就是N-S 方程的变分形式

$$E(\Omega;u,p;\varphi,\eta)=0,\quad \forall\,(\varphi,\eta)\in\mathbb{V}_0(\Omega), \tag{10}$$

其中

$$E(\Omega;u,p;\varphi,\eta) := a(u,\varphi)-b(\varphi,p)-b(u,\eta)+c(u;u,\varphi)-(f,\varphi). \tag{11}$$

这样 (5) 和 (10) 构成一个带等式约束的优化问题。我们需要在区域 Ω 上通过 $\mathrm{d}J(\Omega;V)$ 指示的方向 V 变化，寻找 $J(\Omega)$ 的欧拉半导权。

首先，我们构造如下 Lagrange 函数

$$G(\Omega;\varphi,\eta;\psi,\gamma) := J(\Omega) + E(\Omega;\varphi,\eta;\psi,\gamma), \tag{12}$$

则在确定的区域 Ω 时，只需求以下极大极小值问题

$$\inf_{(\varphi,\eta)\in\mathbb{V}_{\tilde{g}}(\Omega)} \sup_{(\psi,\gamma)\in\mathbb{V}_0(\Omega)} G(\Omega;\varphi,\eta;\psi,\gamma). \tag{13}$$

G 的鞍点应满足下列条件

$$\frac{\partial}{\partial\psi}G(\Omega;u,p;\psi,\gamma)\delta\psi + \frac{\partial}{\partial\gamma}G(\Omega;u,p;\psi,\gamma)\delta\gamma = 0, \quad \forall\,(\psi,\gamma)\in\mathbb{V}_0(\Omega), \tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}G(\Omega;u,p;\varphi,\eta)\delta u + \frac{\partial}{\partial p}G(\Omega;u,p;\varphi,\eta)\delta p = 0, \quad \forall\,(u,p)\in\mathbb{V}_{\tilde{g}}(\Omega). \tag{15}$$

公式 (14) 转化为对应的偏微分方程也就是 Navier-Stokes 方程 (1)。公式 (15) 也可以有对应的偏微分方程形式。推导如下

$$\frac{\partial}{\partial p}G(\Omega;u,p;\varphi,\eta)\delta p = -b(\varphi,\delta p), \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}G(\Omega;u,p;\varphi,\eta)\delta u = &\int_\Omega (u-u_d)\cdot\delta u\mathrm{d}x + a(\delta u,\varphi)\\ &- b(\delta u,\eta) + c(\delta u;u,\varphi) + c(u;\delta u,\varphi).\end{aligned} \tag{17}$$

因为 $\mathrm{div}u = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 = 0$，则

$$\begin{aligned}c(u,\delta u,\varphi) &= \int_\Omega (D\delta u)u\cdot\varphi\mathrm{d}x = \sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega \varphi_j u_i \partial_i \delta u_j \mathrm{d}x\\
&= \int_{\partial\Omega}(u\cdot n)(\delta u\cdot\varphi)\mathrm{d}s - \sum_{i,j=1}^{2}\Big(\int_\Omega u_i\delta u_j\partial_i\varphi_j\mathrm{d}x + \int_\Omega \varphi_j\delta u_j\partial_i u_i\mathrm{d}x\Big)\\
&= \int_{\partial\Omega}(u\cdot n)(\delta u\cdot\varphi)\mathrm{d}s - \int_\Omega (D\varphi)u\cdot\delta u\mathrm{d}x - \sum_{j=1}^{2}\Big(\int_\Omega \varphi_j\delta u_j\sum_{i=1}^{2}\partial_i u_i\mathrm{d}x\Big)\\
&= \int_{\partial\Omega}(u\cdot n)(\delta u\cdot\varphi)\mathrm{d}s - c(u,\varphi,\delta u),\end{aligned}$$

$$c(\delta u,u,\varphi) = \int_\Omega (Du)\delta u\cdot\varphi\mathrm{d}x = \int_\Omega (D^*u)\varphi\cdot\delta u\mathrm{d}x.$$

那么 (15) 式也可以写成

$$\begin{aligned}0 = &\int_\Omega (u-u_d)\cdot\delta u\mathrm{d}x + a(\varphi,\delta u) - b(\delta u,\eta) - b(\varphi,\delta p)\\ &+ \int_{\partial\Omega}(u\cdot n)(\delta u\cdot\varphi)\mathrm{d}s - c(u;\varphi,\delta u) + \int_\Omega (D^*u)\varphi\cdot\delta u\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{18}$$

则 (18) 式的对应的伴随方程是

$$\begin{cases} -\nu\Delta w - (Dw)\cdot u + (D^*u)\cdot w + \nabla q = u_d - u, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ \mathrm{div} w = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ w = 0, & \text{在 } \Gamma_D \text{ 上}, \\ \sigma\cdot n + (u\cdot n)w = 0, & \text{在 } \Gamma_{\mathrm{out}} \text{ 上}, \end{cases} \tag{19}$$

方程 (19) 称为方程 (1) 关于目标函数 (5) 的共轭方程。

同理易得方程 (1) 关于目标泛函 (6) 的共轭方程为

$$\begin{cases} -\nu\Delta w - (Dw)\cdot u + (D^*u)\cdot w + \nabla q = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ \mathrm{div} w = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ w = 0, & \text{在 } \Gamma_D \text{ 上}, \\ \sigma\cdot n + (u\cdot n)w = u_d - u, & \text{在 } \Gamma_{\mathrm{out}} \text{ 上}. \end{cases} \tag{20}$$

4 形状导数

有了共轭方程，我们则可以使用函数空间参数化方法推导形状导数的表达式[6-9]。设 $V(t,x)$，$t \geq 0$，$x \in \mathbb{R}^n$ 是区域中的速度场，区域 Ω 通过速度场 V 得到新的区域 $\Omega_t := T_t(\Omega)$，令 $u_t := u(\Omega_t)$，$p_t := p(\Omega_t)$ 是方程 (10) 在变换后的区域 Ω_t 上的解

$$E(\Omega_t; u_t, p_t; \varphi, \eta) = 0, \quad \forall\,(\varphi,\eta) \in \mathbb{V}_0(\Omega_t), \tag{21}$$

并且符合目标函数使得

$$J(\Omega_t) = \inf_{(\varphi,\eta)\in\mathbb{V}_{\tilde g}(\Omega_t)} \sup_{(\psi,\gamma)\in\mathbb{V}_0(\Omega_t)} G(\Omega_t; \varphi, \eta; \psi, \gamma), \tag{22}$$

其中 (u_t, p_t) 满足

$$\frac{\partial}{\partial\psi} G(\Omega_t; u_t, p_t; \psi, \gamma)\delta\psi + \frac{\partial}{\partial\gamma} G(\Omega_t; u_t, p_t; \psi, \gamma)\delta\gamma = 0, \quad \forall\,(\psi,\gamma) \in \mathbb{V}_0(\Omega_t), \tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial u_t} G(\Omega_t; u_t, p_t; \varphi, \eta)\delta u_t + \frac{\partial}{\partial p_t} G(\Omega_t; u_t, p_t; \varphi, \eta)\delta p_t = 0, \quad \forall\,(\varphi,\eta) \in \mathbb{V}_{\tilde g}(\Omega_t). \tag{24}$$

空间 $\mathbb{V}_0(\Omega_t)$ 是关于 t 的，下面我们需要消去 t，把所有的在区域 Ω_t 上和任意一段边界 $\Gamma_t \subset \partial\Omega_t$ 的积分转化到区域 Ω 上和边界 $\Gamma \subset \partial\Omega$ 上。

由公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_t} F(t,x)\mathrm{d}x\,\Big|_{t=0} = \Big(\int_\Omega \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} F(t,x)V(t)\cdot n\mathrm{d}s\Big)\Big|_{t=0}, \tag{25}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\bar\Gamma_t} F(t,x)\mathrm{d}s\,\Big|_{t=0} = \Big(\int_{\bar\Gamma} \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)\mathrm{d}x + \int_{\bar\Gamma}\Big(\frac{\partial F}{\partial n}(t,x) + HF(t,x)\Big)V(t)\cdot n\mathrm{d}s\Big)\Big|_{t=0}, \tag{26}$$

其中$F:[0,\tau]\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$是足够光滑的函数，$n$是$\tilde{\Gamma}$的外法方向，$H:=\operatorname{div}n$，则当$t=0$时，$\Omega_0=\Omega$，对任意的$(\varphi,\eta)\in\mathbb{V}_{\tilde{g}}(\Omega)$，$(\psi,\gamma)\in\mathbb{V}_0(\Omega)$，有

$$\begin{aligned}\partial_t G(\Omega,\varphi,\eta,\psi,\gamma)\,|_{t=0} = &\int_\Omega(\varphi-u_d)\varphi'\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\varphi-u_d|^2V_n\mathrm{d}s+a(\varphi',\psi)+a(\varphi,\psi')\\ &+\int_{\partial\Omega}2\nu\varepsilon(\varphi):\varepsilon(\psi)V_n\mathrm{d}s-b(\varphi',\gamma)-b(\varphi,\gamma')\\ &-\int_{\partial\Omega}\gamma\operatorname{div}\varphi V_n\mathrm{d}s-b(\psi',\eta)-b(\psi,\eta')\\ &-\int_{\partial\Omega}\eta\operatorname{div}\psi V_n\mathrm{d}s+c(\varphi';\varphi,\psi)+c(\varphi;\varphi',\psi)+c(\varphi;\varphi,\psi')\\ &+\int_{\partial\Omega}(D\varphi)\varphi\cdot\psi V_n\mathrm{d}s-(f,\psi')-\int_{\partial\Omega}f\cdot\psi V_n\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中$V_n=V(0)\cdot n$，符号$\alpha'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha\circ T_t^{-1}|_{t=0}=-\nabla\alpha\cdot V(0)$。更进一步的，将方程(1)和(19)的解$(u,p;w,q)$带入上式子中替换$(\varphi,\eta;\psi,\gamma)$，则

$$\begin{aligned}\partial_t G(\Omega;u,p;w,q) = &\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|u-u_d|^2V_n\mathrm{d}s+\int_{\partial\Omega}2\nu\varepsilon(u):\varepsilon(w)V_n\mathrm{d}s\\ &-\int_{\partial\Omega}(q\operatorname{div}u+p\operatorname{div}w)V_n\mathrm{d}s+\int_{\partial\Omega}(Du)u\cdot wV_n\mathrm{d}s\\ &-\int_{\partial\Omega}f\cdot wV_n\mathrm{d}s+a(u,w')-b(u,q')-b(w',p)+c(u;u,w')-(f,w')\\ &+\int_\Omega(u-u_d)u'\mathrm{d}s+a(u',w)-b(u',q)-b(w,p')+c(u';u,w)+c(u;u',w).\end{aligned}$$

由式(14)令$\varphi=w'$，$\eta=q'$，由式(15)令$\psi=u'$，$\gamma=p'$，则上式可以化简为

$$\mathrm{d}J(\Omega;V)=\partial_t G(\Omega;u,p;w,q)=\int_{\partial\Omega}K(\partial\Omega;u,p;w,q)V_n\mathrm{d}s, \tag{27}$$

其中

$$K(\partial\Omega;u,p;w,q)=\frac{1}{2}|u-u_d|^2+2\nu\varepsilon(u):\varepsilon(w)-q\operatorname{div}u-p\operatorname{div}w+(Du)u\cdot w-f\cdot w. \tag{28}$$

更进一步，因只需要对边界$\tilde{\Gamma}\subset\Gamma_D$上进行优化，则只需要求得$K$在$\tilde{\Gamma}$上的值即可，且在$\tilde{\Gamma}$上$\operatorname{div}u=0$，$\operatorname{div}w=0$，$u=0$，则$K$可简化为

$$K(\partial\Omega;u,p;w,q)\,|_{\tilde{\Gamma}}=\frac{1}{2}|u-u_d|^2+2\nu\varepsilon(u):\varepsilon(w)-f\cdot w, \tag{29}$$

易得，目标泛函(6)也有类似的结果

$$\mathrm{d}J(\Omega;V)=\partial_t G(\Omega;u,p;w,q)=\int_{\partial\Omega}K(\partial\Omega;u,p;w,q)V_n\mathrm{d}s, \tag{30}$$

其中

$$K(\partial\Omega;u,p;w,q)\,|_{\tilde{\Gamma}}=\frac{\partial}{\partial n}|u-u_d|^2+\frac{1}{2}H|u-u_d|^2+2\nu\varepsilon(u):\varepsilon(w)-f\cdot w. \tag{31}$$

5 形状优化算法

现在我们可以得到形状优化的算法[10,11]。首先求出状态方程和对偶方程的解，然后求出目标泛函梯度方向 K，求解得到下降方向 d 进行迭代最终得到目标形状。因为 K 仅仅是定义在边界上的，所以选择拉普拉斯算子把 K 延拓到区域 Ω 上得到 $\tilde{K}$，而在边界 $\partial\Omega$ 上时，$\tilde{K}$ 在仅在需要优化的边界 $\tilde{\Gamma}$ 上不为 0。$d=(d_1,d_2)\in(H^1(\Omega))^2$，对于任意的 $V\in H^1(\Omega)$，有

$$\int_\Omega \nabla d_i\cdot\nabla V_i \mathrm{d}x=\left\langle \mathrm{d}J(\Omega),V_i\right\rangle,\quad i=1,2, \tag{32}$$

且易证 d 为 J 的下降方向。

则形状优化的算法可以总结为：

步骤1 $k=0$，给定初始的形状 Ω^0。

步骤2 计算状态方程，即计算其变分形式 (10) 式，得到 (u^k,p^k)，若 $|J(\Omega^k)-J(\Omega^{k-1})|<\varepsilon$，停止，区域 Ω^k 为所求区域；否则转到步骤 3。

步骤3 带入 (u^k,p^k)，计算共轭方程 (19) 或者 (20) 式，得到 (w^k,q^k)。

步骤4 计算出形状函数的梯度 $K^k=K(\partial\Omega^k;u_k,p_k;w_k,q_k)$，用下面方程将其延拓到区域 Ω^k 上得到 $\tilde{K}^k$:

$$\begin{cases}-\Delta\tilde{K}^k=0, & \text{在}\ \ \Omega^k\ \ \text{中},\\ \tilde{K}^k=K^k, & \text{在}\ \ \tilde{\Gamma}^k\ \ \text{上},\\ \tilde{K}^k=0, & \text{在}\ \ \partial\Omega^k/\tilde{\Gamma}^k\ \ \text{上},\end{cases} \tag{33}$$

其中 $\tilde{\Gamma}$ 是需要优化的边界。

步骤5 求解下式得到下降方向 d^k

$$\begin{cases}-\Delta d_i^k=\tilde{K}^k, & \text{在}\ \ \Omega^k\ \ \text{中},\\ \frac{\partial d_i^k}{\partial n_i}=0, & \text{在}\ \ \tilde{\Gamma}^k\ \ \text{上},\\ d_i^k=0, & \text{在}\ \ \partial\Omega^k/\tilde{\Gamma}^k\ \ \text{上},\end{cases}\qquad i=1,2. \tag{34}$$

步骤6 给定步长 $\alpha_k>0$，形状优化 $\partial\Omega^k=\partial\Omega^{k-1}+\alpha_k d^k$ 得到新的区域 Ω^k，$k=k+1$。转到步骤 2。

注 在这里我们取搜索步长 $\alpha_k\equiv\alpha>0$ 为常数。

6 数值算例

下面我们给出数值算例验证算法的正确性和稳定型。取 Reynolds 数 $Re=800$，$f=0$。区域 $\Omega_1=(0,8)\times(0,2)$，图 2 中实线所示，或 $\Omega_2=\Omega_1/B$，B 为中心在 $(1.5,0)$ 半径为 0.5 的上半圆，图 2 中虚线所示。对于每个算例分别取 Ω_2 和 Ω_2 作为目标形状来进行形状优化。算例 1 和算例 2 用来验证对于两个目标函数的算法的正确性，选择的目标速度 u_d 由在目标形状下有限元法计算求得。而算例 3 要验证算法的稳定性，在目标速度 u_d 上加上了一定的扰动。如图 2 虚线所示入流边界 Γ_{in} 的边界条件 $g=(g_1,g_2)$，$g_1=y(2-y)$，$g_2=0$。数值算例使用 FreeFem++2.21 软件进行计算[8]，采用 $P2-P1$ 元。使用计算机的配置 CPU 为 Pentium 2.4 GHz，内存为 512 MB。在实际工程计算中 u_d 是物理测试得到的结果，本文中取 u_d 为在精确区域中有限元计算的结果。

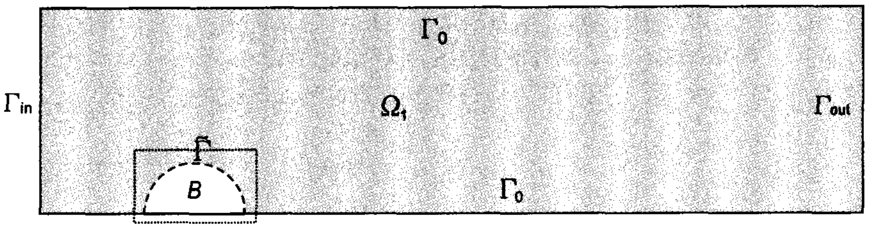
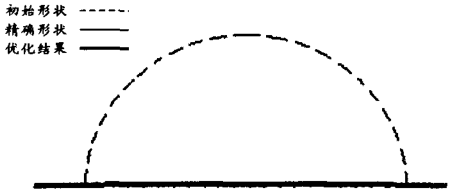


图 2: 灰色区域是 Ω_1，白色的半圆型是区域 B，整个矩形区域是 Ω_2

算例1　取目标函数为式(5)式。

图3和图4是以 Ω_2 为目标形状，而 Ω_1 为初始形状的优化结果。图中显示的为迭代40步时的情况，耗时843.172 s。

图5和图6以是 Ω_1 为目标形状，Ω_2 为初始形状的优化结果。图中显示的为迭代40步时的情况，耗时913.145 s。



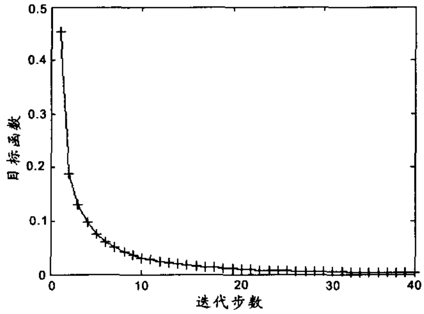


图 3: 左图：形状优化结果；右图：迭代目标函数值与迭代步数的关系

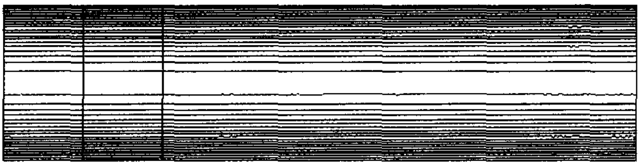


图 4: 水平方向的速度 u_1 图

算例2　取目标函数为(6)式。

图7和图8是以 Ω_2 为目标形状，Ω_1 为初始形状的优化结果。图中显示的为迭代40步时的情况，耗时867.753 s。

算例3　加扰动的算例。

在实际计算中，目标速度函数 u_d 常常由仪器测试得到，总不能够十分精确，会有一定的误差，则要求算法具有一定的稳定性。本文中为了验证算法的稳定性，讨论 u_d 加上3% 的扰动之后的函数 $\tilde{u}_d$ 的形状优化情况，则目标函数(5)变为 $J(\Omega) = \frac{1}{2}\int_\Omega |u - \tilde{u}_d|^2 \mathrm{d}x$。

图9和图10是以Ω_1为精确区域，Ω_2为初始迭代区域迭代的情况。图9的左图显示的为迭代40步时的情况，耗时897.474s。图9的右图是目标函数$J(\Omega)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}|u-\tilde{u}_d|^2\mathrm{d}x$与迭代步数的关系图(实线和“+”表示)，还有(5)与迭代步数的关系以作比较(黑色点)。

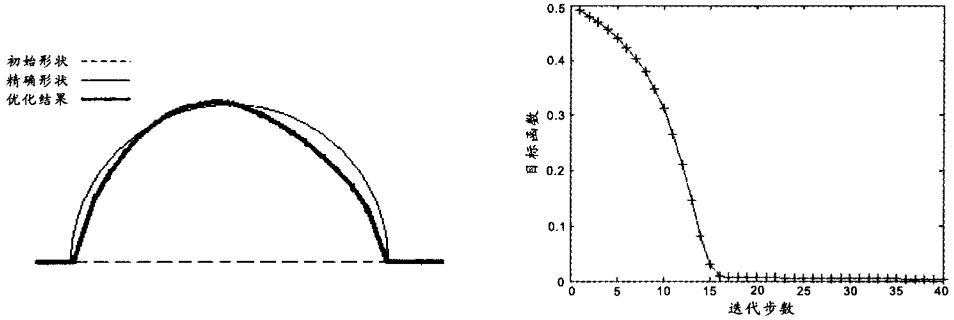


图5: 左图：形状优化结果；右图：迭代目标函数值与迭代步数的关系

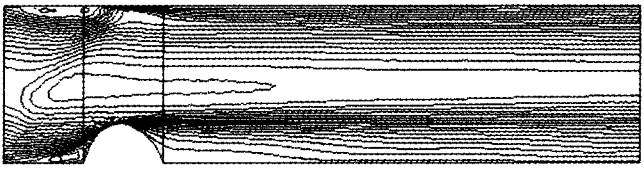


图6: 水平方向的速度u_1图

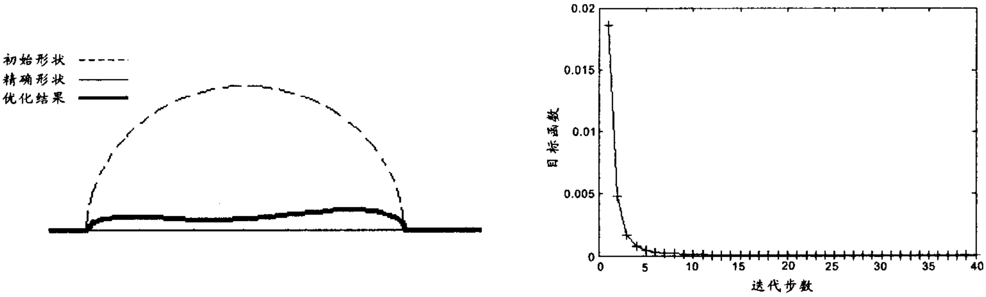


图7: 左图：形状优化结果；右图：迭代目标函数值与迭代步数的关系

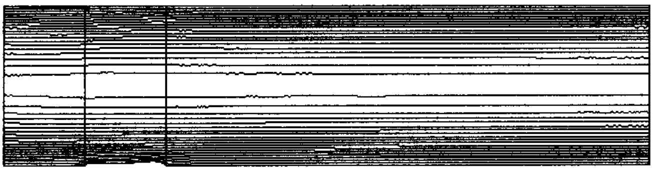


图8: 水平方向的速度u_1图

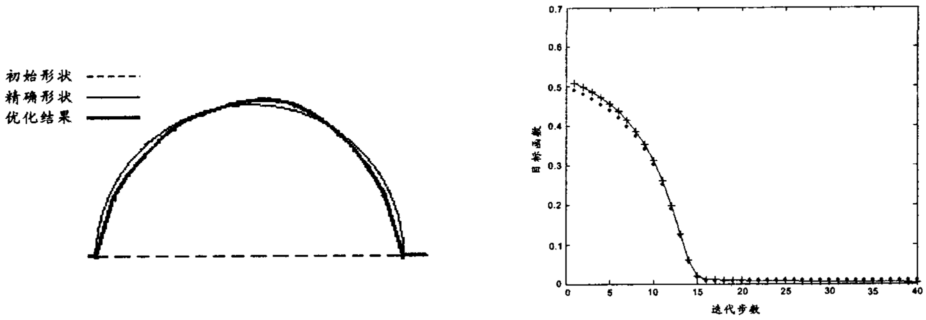


图 9:　左图：形状优化结果；右图：迭代目标函数值与迭代步数的关系

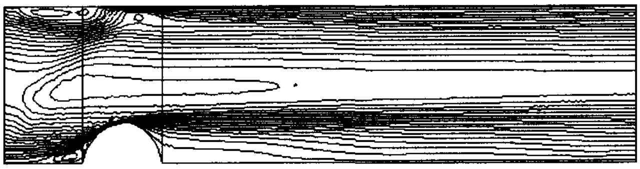


图 10:　水平方向的速度 u_1 图

7　结论

算法求解混和边界条件的不可压缩流的形状优化问题是可行的。基本上可以的到期望的形状，目标函数也基本上收敛到0。

第一个目标函数1即(5)比第二个目标函数即(6)收敛速度快而且收敛效果明显，得到的区域Ω也更加接近精确解。因为(5)中求解的速度与目标速度u_d在整个区域上进行比较，能得到更多关于目标速度u_d的信息，而(6)仅仅是在边界上进行比较。

该算法具有一定的稳定性，当目标速度函数u_d加上一定的扰动后仍然可以得到比较有效的结果。

更进一步这些算法可以应用到非定常的Navier-Stokes方程，而且也可以应用到工业中去。

参考文献：

[1] Gao Z M, Ma Y C. Shape sensitive analysis for a Robin problem via minimax differentiability[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 181(2): 1090-1105

[2] Gao Z M, Ma Y C. Shape gradient of the dissipated energy functional in shape optimization for the viscous incompressible flow[J]. Applied Numerical Mathematics, 2008, 58(11): 1720-1741

[3] Céa J. Lectures on Optimization Theory and Algorithms[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1978

[4] Delfour M C, Zolésio J P. Shape sensitivity analysis via minmax differentiability[J]. SIAM Journal of Control and Optimization, 1988, 26: 834-862

[5] Delfour M C, Zolésio J P. Shapes and Geometries: Analysis, Differential Calculus, and Optimization[M]. Philadelphia: SIAM, 2000

[6] Sokolowski J, Zoléio J P. Introduction to Shape Optimization: Shape Sensitivity Analysis[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1992

[7] Haslinger J, Mäkinen R A E. Introduction to Shape Optimization: Theory, Approximation, and Computation[M]. Philadelphia: SIAM, 2003

[8] Hecht F, Pironneau O, Hyaric A Le, *et al.* FreeFem++ Manual[OL]. Available at http://www.freefem.org

[9] Pironneau O. Optimal Shape Design for Elliptic systems[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1984

[10] Gao Z M, Ma Y C. On Navier-Stokes system with variable viscosity in a noncylindrical domain[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2007, 24(6): 1101-1108

[11] 晏文璟，任春风，马逸尘. 非定常N-S方程的双重网格数值模拟[J]. 工程数学学报，2005, 22(6): 1026-1030
Yan W J, Ren C F, Ma Y C. Numerical simulation of two-grid method for the unsteady Navier-Stokes equations[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2005, 22(6): 1026-1030

Function Space Parameterization Technique for Shape Optimization Problem of Incompressible Fluid

ZHU Jing-tao, GAO Zhi-ming, MA Yi-chen

(Faculty of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Abstract: The shape optimal design for fluid is very important in applications. For a fluid in a region described by a Navier-Stokes equation, our cost fuction is a functional of states of the fluid. Based on the adjoint method and a parametrization method, a formulae of the shape derivatives is established for the problem. Then a conjugate-graduate algorithm is proposed. The numerical examples show the effectiveness and stability of the algorithm.

Keywords: shape optimization; Navier-Stokes; minimax formulation

Received: 30 May 2008. **Accepted:** 12 Nov 2008.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10671153; 40730424).